

Két gömb áthatása – 4. rész

Az interneten találkoztunk az alábbi érdekes feladattal – 1. ábra

42. Soap Bubbles When two bubbles cling together in midair, their common surface is part of a sphere whose center D lies on the line passing through the centers of the bubbles (see the figure). Also, $\angle ACB$ and $\angle ACD$ each have measure 60° .

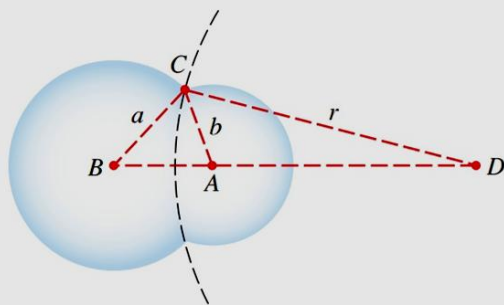
(a) Show that the radius r of the common face is given by

$$r = \frac{ab}{a - b}$$

[Hint: Use the Law of Sines together with the fact that an angle θ and its supplement $180^\circ - \theta$ have the same sine.]

(b) Find the radius of the common face if the radii of the bubbles are 4 cm and 3 cm.

(c) What shape does the common face take if the two bubbles have equal radii?



1. ábra – forrása: [1]

A feladat

Szappanbuborékok.

Az 1. ábrán azt szemléltették, hogy két gömb alakú, $a = BC$ és $b = AC$ sugarú szappan - buborék összeolvadt. Az $\angle ACB$ és a $\angle ACD$ szögek egyenlő nagyságúak, értékük 60° .

A két buborék - gömb közös felülete egy D középpontú, r sugarú gömb egy része, ahol a D középpont az A és B középpontok összekötő egyenesén fekszik.

a.) Mutassuk meg, hogy a közös gömbfelület sugara:

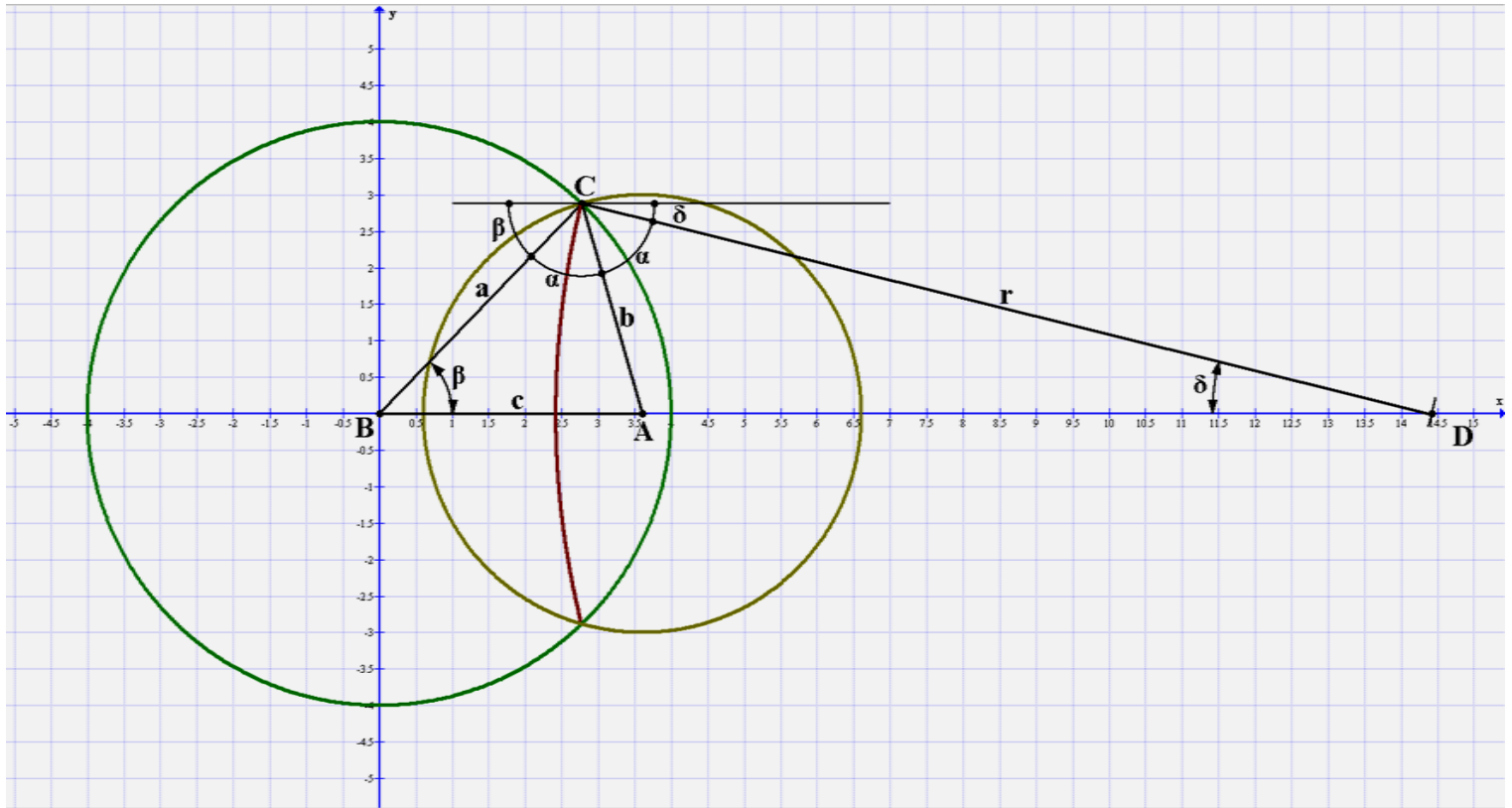
$$r = \frac{a \cdot b}{a - b} ; \quad (*)$$

b.) Határozzuk meg az r sugár nagyságát, ha $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$!

c.) Állapítsuk meg, hogy milyen alakot vesz fel a közös felület, ha $a = b$!

A megoldás

a.) Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

1. lépés: c meghatározása ismert a , b és $\alpha = 60^\circ$ mellett

Koszinusztétellel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - a \cdot b, \text{ innen:}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b}. \quad (1)$$

2. lépés: $\sin \beta$ meghatározása ismert a , b , c és $\alpha = 60^\circ$ mellett

Szinusztétellel, valamint (1) - gyel is:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \rightarrow \sin \beta = \sin \alpha \cdot \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b}}, \text{ tehát:}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b}}. \quad (2)$$

3. lépés: $\sin \delta$ meghatározása (elvileg) ismert β és $\alpha = 60^\circ$ mellett

Ismét az 1. ábra alapján:

$$\beta + 2 \cdot \alpha + \delta = 180^\circ \rightarrow \delta = 180^\circ - \beta - 2 \cdot \alpha = 180^\circ - \beta - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ - \beta,$$

innen:

$$\delta = 60^\circ - \beta. \quad (3)$$

Most (3) - ból:

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin(60^\circ - \beta) = \sin 60^\circ \cos \beta - \cos 60^\circ \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \beta - \frac{1}{2} \cdot \sin \beta , \\ \sin \delta &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos \beta - \sin \beta) .\end{aligned}\quad (4)$$

4. lépés: r meghatározása ismert a , $\sin \beta$, $\sin \delta$ mellett

Szinusztétellel:

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \rightarrow r = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \delta} . \quad (5)$$

Átalakításokkal, (3) és (4) szerint:

$$\begin{aligned}r &= a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \delta} = a \cdot \frac{\sin \beta}{\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos \beta - \sin \beta)} = 2 \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - 1} , \text{ azaz:} \\ r &= 2 \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - 1} .\end{aligned}\quad (6)$$

Folytatva (2) és (6) - tal:

$$\begin{aligned}\frac{\cos \beta}{\sin \beta} &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \beta} - 1} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 - a \cdot b}{b^2} - 1} = \sqrt{\frac{4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b - 3 \cdot b^2}{3 \cdot b^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{4 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot b + b^2}{3 \cdot b^2}} = \sqrt{\frac{(2 \cdot a - b)^2}{3 \cdot b^2}} = \frac{2 \cdot a - b}{\sqrt{3} \cdot b} , \text{ azaz:} \\ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} &= \frac{2 \cdot a - b}{\sqrt{3} \cdot b} .\end{aligned}\quad (7)$$

Most (6) és (7) - tel:

$$r = 2 \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - 1} = 2 \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \frac{2 \cdot a - b}{\sqrt{3} \cdot b} - 1} = 2 \cdot a \cdot \frac{1}{\frac{2 \cdot a - b}{b} - 1} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{2 \cdot a - b - b} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{2 \cdot (a - b)} = \frac{a \cdot b}{a - b} ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{r = \frac{a \cdot b}{a - b}}} . \quad (8)$$

Ezzel igazoltuk a (*) képletet.

b.) Számszerűen: $r = \frac{a \cdot b}{a - b} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}}{4 \text{ cm} - 3 \text{ cm}} = 12 \text{ cm}$, tehát:

$$\underline{\underline{r = 12 \text{ cm}}} . \quad (e)$$

c.) Ha $a = b$, akkor (8) - ből:

$r(b \rightarrow a) \rightarrow \frac{a \cdot a}{a - a} \rightarrow \infty$, vagyis a közös felület egy sík - darab.

Ezzel a kitűzött feladatokat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. A [2] forrás szerint:

Nem számít, milyen formában van egy buborék kezdetben, igyekszik gömbbé válni. A gömb olyan alak, amely minimalizálja a szerkezet felületét, ami a legkevesebb energiaigényű alakot teszi lehetővé.

Mi történik, ha a buborékok találkoznak?

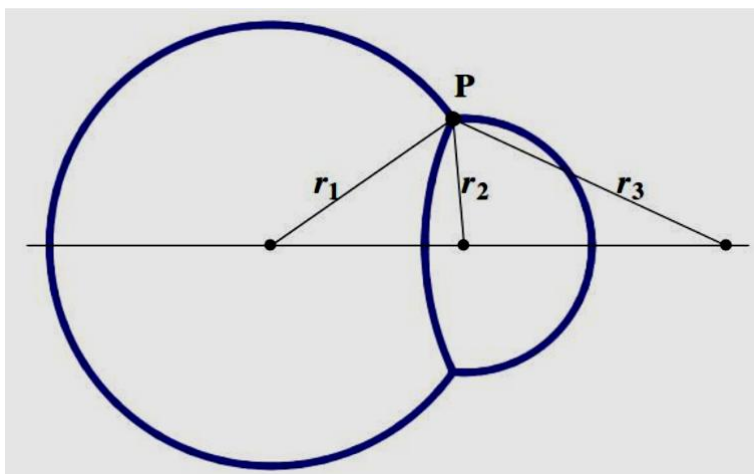
Amikor a buborékok össze vannak kötve, ezek gömbök maradnak? Nem - ha két buborék találkozik, a falakat összeolvasztják, hogy minimalizálják a felületüket. Ha ugyanolyan méretű buborékok találkoznak, akkor a fal, amely elválasztja őket, sík lesz. Ha különböző méretű buborékok találkoznak, akkor a kisebb buborék benyomul a nagyobb buborék belsejébe. A buborékok 120 fokos szögben metszik egymást.

M2. Az előző megjegyzés fordítása nem volt tökéletes; kicsit átalakítottuk.

M3. Javasoljuk az érdeklődő Olvasónak, hogy rajzolja meg a c.) ponthoz tartozó gömböket, azok pontos adataival!

M4. Az interneten még sok egyéb érdekes dologgal is találkozhatunk a buborékok geometriája és fizikája témakörben, mely igencsak szerteágazó, messzire vezető és bonyolult.

M5. A (8) képlet egy másik változata így fest – 3. ábra – :



3. ábra – forrása: [3]

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} . \quad (8^*)$$

A 3. ábrához tartozó szövegből átveszünk egy részt, kicsit megváltoztatva.

A kettős buborékhoz két gömb alakú külső felület tartozik, amelyeket egy gömb alakú belső felület köt össze. A 3. ábrán egy kettős buborék hosszmetSZete látható.

M6. Ha a 3. ábra metszeti képét a gömbök középpontjait összekötő vízszintes egyenes – mint forgástengely – körül megforgatjuk, akkor a **P** pontok itt is leírják azt az **r*** sugarú kört, melyet az előző részekben áthatási görbének neveztünk. A lényeges különbség az ottani és az itteni helyzet között az, hogy itt nem két, hanem három gömb szerepel, fizikai okok miatt. Az **r*** sugar nagysága a 2. ábráról, a (2) képlettel is:

$$r^* = a \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b}} , \quad (9)$$

az ennek megfelelő fonálhossz pedig (9) - cel is:

$$l^* = 2 \cdot \pi \cdot r^* = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b}} = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b}} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{l^* = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b}}} . \quad (10)$$

Ha **b = a** , akkor (10) - ből is:

$$\underline{l^*(b = a) = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot a} . \quad (10 / 1)$$

M7. A (8) , (8*) képletek fizikai alapon nyugvó levezetése is megtalálható az internetes anyagokban. Ezek olvasgatása előtt érdemes átismételni a görbületi / kapilláris nyomással kapcsolatos tudnivalókat. Ehhez ld. pl.: [4]! Ezután (8*) már elég könnyen levezethető.

Források:

[1] – **James Stewart ~ Lothar Redlin ~ Saleem Watson:** Precalculus

7. ed., CENGAGE Learning, 2016.

[2] – <https://hu.eferrit.com/bubble-science/>

[3] – <https://thatsmaths.com/2015/01/22/plateaus-problem-and-double-bubbles/>

[4] – **Tasnádi Péter ~ Skrapits Lajos ~ Bérces György:** Általános fizika
Mechanika II.

Dialóg Campus Kiadó, Pécs - Budapest, 2001.

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2022. 02. 13.

Továbbiak: <https://galgoczy.net/>